Chapitre 5

Dénombrement et Probabilités sur un ensemble fini

I Ensembles finis : quelques bases de dénombrement

1) Cardinal

a) Généralités :

Définition 1

Soit E un ensemble fini (c'est à dire contenant un nombre fini d'éléments). On appelle cardinal de E, noté $\mathrm{Card}(E)$ *ou* $\#E$*, le nombre d'éléments de E.*

Exemple : $E = \{1, 4, 6\}$ est de cardinal 3.
$E = \{2, 6, -2, 2, 4\}$ est de cardinal 4 (les doublons ne comptent qu'une fois).
Si E est l'ensemble des lettres de l'alphabet romain : $\mathrm{Card}(E) = 26$
$\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$

Remarque :
Dire que E est de cardinal n permet de numéroter les éléments de E.
Ainsi on pourra noter $E = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ avec la convention que tous les e_i sont distincts.
Une telle écriture n'est pas possible avec des intervalles réels par exemple.

Proposition 1

Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ (c'est à dire $A \subset E$) où E est un ensemble fini. Alors $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(E)$*. En outre, si $A \subset E$, et* $\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(E)$*, alors $A = E$.*

▷ *Preuve* : on admet, même si c'est intuitivement évident.... ◁

b) Méthode élémentaire : arbre des possibilités

Une situation qui se produit très souvent en dénombrement est le "comptage par arbre de choix" : cela consiste à décomposer une situation en plusieurs sous situations.
Prenons un exemple : dans un restaurant, le menu "découverte" propose le choix entre 3 entrées, 4 plats principaux et 2 desserts. Combien de repas peut-on faire avec ce menu ?
Le plus simple est de faire un arbre :

On compte alors le nombre de branches à la fin : chaque branche correspond à un repas différent (on dit qu'on a effectué une partition des cas).

On obtient : $3 \times 4 \times 2 = 24$ branches, c'est à dire 24 repas différents.

Remarque :
Très rapidement, on n'essaiera plus de dessiner l'arbre de comptage, car les cas sont vite trop nombreux pour être représentés. Néanmoins, gardez en tête cette représentation pour vous rappeler qu'il faut multiplier....

c) Cardinal de l'union

Définition 2

$A \cup B$ désigne l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent à A ou à B (ou au deux).

En maths, l'union est toujours au sens large : A ou B ne veut jamais dire "soit A, soit B".
Exemple : si $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 5\}$, 2 est bien un élément de A ou B. De même, 1 est un élément de A ou de B.
Soit A et B deux sous ensembles de E. Que dire de $\text{Card}(A \cup B)$?
Deux situations possibles :

Proposition 2

Soit A et B deux sous ensembles de E. Alors

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B - \text{Card}\, A \cap B$$

En particulier, si A et B sont disjoints (ie $A \cap B = \emptyset$), alors

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}\, A + \text{Card}\, B$$

▷ *Preuve :* Quand on compte les élémets de A et ceux de B, on a compté deux fois les éléments de $A \cap B$. Il faut donc les retirer une fois pour compter les éléments de $A \cup B$.

◁

Méthode : *si on a plus de deux ensembles :*
Deux cas :

1. Si les ensembles sont disjoints deux à deux, il suffit de faire la somme des cardinaux.
2. Sinon, il faut "faire des groupes" pour calculer avec la formules

Par exemple $\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}((A \cup B) \cup C)$. En appliquant la formule aux deux ensembles $(A \cup B)$ et C on obtient :

On peut d'ailleurs retenir cette formule pour 3 ensembles

$$\#(A\cup B\cup C)=\#(A)+\#(B)+\#(C)-\#(A\cap B)-\#(A\cap C)-\#(B\cap C)+\#(A\cap B\cap C)$$

Au secours ! *Que fait-on de ces intersections ?*
De manière générale, on ne peut rien dire sur le cardinal de $A\cap B$. Tout juste peut-on écrire

$$\text{Card}(A\cap B)\leq min(\text{Card}(A),\text{Card}(B))$$

Il faut donc, pour calculer $\text{Card}(A\cap B)$, étudier cas par cas ce qu'il se passe....

2) Les p-listes et les p-listes sans répétition

a) Les p-listes

Commençons par rappeler les définitions suivantes, autour du produit cartésien :

Définition 3

Si E et F sont deux ensembles, $E\times F$ désigne l'ensemble des couples formés d'un élément de E et d'un élément de F, autrement dit

$$E\times F=\{(x,y),x\in E \text{ et } y\in F\}$$

Définition 4

Pour $p\in\mathbb{N}$, on définit E^p comme l'ensemble des p uplets constitués de p éléments de E, c'est à dire $E^p=\underbrace{E\times E\times ...\times E}_{p \text{ éléments}}$

Vocabulaire : *En probabilité, on parlera de p listes d'éléments de E.*

A noter : *parenthèse ou accolade ?*
Pour les p listes et les produits cartésiens en général, l'ordre est important. On marque cet ordre en utilisant des parenthèses :
Le couple $(1,2)$ est différent du couple $(2,1)$.
En revanche, les accolades désignent l'ensemble des valeurs. Ainsi, $\{1,2\}$ et $\{2,1\}$ désigne le même ensemble...
A retenir : parenthèse si l'ordre est important, accolades si l'ordre est indifférent.

Proposition 3

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $\text{Card}(E\times F)=\text{Card}(E)\times\text{Card}(F)$

▷ *Preuve :* On raisonne par décomposition des choix (sans dessiner l'arbre associé) : pour faire un couple (x,y) de $E\times F$, on a $\text{Card}(E)$ possibilités pour x, $\text{Card}(F)$ possibilités pour y, ce qui fait un total de $\text{Card}(E)\times\text{Card}(F)$ possibilités.
On peut aussi voir cela comme un tableau à double entrée... ◁

Corollaire 1

Soit $p\in\mathbb{N}$:

(i) Soient $E_1,E_2,\ldots,E_p$ p ensembles finis, alors

$$\text{Card}(E_1\times E_2\times\ldots\times E_p)=\text{Card}(E_1)\,\text{Card}(E_2)\ldots\text{Card}(E_p)$$

(ii) Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit $p\in E$.
Alors il y a n^p $p-$listes d'éléments de E.

▷ *Preuve :*
(i) par récurrence à partir de la proposition précédente.
(ii) les $p-$listes sont les élements de E^p et d'après (i), $\text{Card}(E^p)=\text{Card}(E)^p$.
◁

Exemple :
On retourne au restaurant précédent. En notant E l'ensemble des entrées, P l'ensemble des plats et D l'ensemble des desserts, un repas est un élément de $R = E \times P \times D$, donc il y a $\text{Card}(R)$ repas possibles, soit $\text{Card}(E) \times \text{Card}(P) \times \text{Card}(D) = 3 \times 4 \times 2 = 24$.

Méthode :
Lors des problèmes de dénombrement, il ne faut pas hésiter si besoin à introduire d'autres ensembles que ceux proposés dans l'énoncé afin de faire apparaître des ensembles manipulables (union/réunion ou produit cartésien d'ensembles connus...)

b) Listes sans répétition

Exemple :
Lors d'une course hippique, dix chevaux sont partants. Combien de tiercés sont possibles à l'arrivée ?
Raisonnons en décomposant les choix : on a 10 possibilités pour le premier arrivé, puis 9 possibilités pour le second et enfin 8 pour le dernier. Cela nous donne donc 10x9x8=720 tiercés possibles...
Ce genre de situation arrivant fréquemment, on pose la définition suivante :

Définition 5

Soit un ensemble fini E et $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. On appelle p-listes sans répétition de E toute p-liste $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple :
- un tiercé est une 3-liste sans répétition.
- Soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: (1,2,3,4),(4,3,2,1) et (1,4,3,2) sont trois listes différentes de 4 éléments de E. $(1, 3, 3)$ n'est pas une liste sans répétition d'éléments de E (mais c'est quand même une 3−liste.)

Théorème 1

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in \mathbb{N}$, avec $1 \leq p \leq n$. Le nombre de p-listes de E sans répétition est

$$\frac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n(n-1)\ldots(n-p+1)}_{p \text{ termes}}$$

▷ *Preuve :*
Construisons une telle liste :
- On dispose de n possibilités pour choisir le premier élément
- Pour le deuxième, il doit être différent du premier, ce qui laisse donc $n-1$ possibilités
- Pour le troisième : $n-2$ possibilités
- ⋮
- Pour le p-ième et dernier : $n-p+1$ possibilités

n branches donnent naissances à un arbre qui commence par $n-1$ branches, donnant elles mêmes naissance chacune à un arbre qui commence par $n-2$ branches, et ainsi de suite.
On obtient donc $n(n-1)(n-2) \times (n-p+1)$ possibilités au final.
Remarquons enfin qu'on peut écrire ce nombre sous la forme : $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ car

$$\frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\ldots\times 1}{(n-p)(n-p-1)\ldots\times 1} = n(n-1)\times\ldots\times(n-p+1)$$

◁

Remarque : Évidemment, si $p > n$, il n'y a pas de p listes sans répétition possible...

c) Cas particulier : permutations

Définition 6

Soit E un ensemble fini et $n = \text{Card}(E)$.
On appelle permutation les listes de E contenant exactement une fois chaque élément de E, c'est à dire les $n-$listes sans répétition de E.

Exemple : les permutations de $E = \{1, 2, 3\}$ sont
$(1, 2, 3)$ $(1, 3, 2)$ $(2, 1, 3)$ $(2, 3, 1)$ $(3, 1, 2)$ $(3, 2, 1)$.

Comme donner une permutation d'un ensemble E de cardinal n revient à donner n-liste sans répétition, on a donc directement la formule :

Proposition 4

Soit E un ensemble à n éléments. Le nombre de permutations de E est $n!$

3) Parties et combinaisons :

a) Parties d'un ensemble :

Définition 7

Soit E un ensemble. On appelle partie de E *tout sous ensemble de E, et on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties.*

Ainsi, dire que A est une partie de E veut simplement dire que $A \subset E$.

Proposition 5

Soit E un ensemble fini et $n = \text{Card}(E)$. Alors $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

▷ *Preuve :* Notons $e_1, e_2, \ldots, e_n$ les n éléments de E, et comptons toutes les possibilités pour construire une partie A de E.
- Choisissons si $e_1 \in A$: 2 possibilités (appartient ou n'appartient pas)
- Choisissons si $e_2 \in A$: 2 possibilités
- $\vdots$
- Choisissons si $e_n \in A$: 2 possibilités

Au final, on a $2 \times \ldots \times 2 = 2^n$ possibilités pour construire A, c'est à dire 2^n parties possibles. ◁

b) Combinaison :

Définition 8

Soit E un ensemble fini. On appelle combinaison à p éléments de E toute partie (ie tout sous ensemble) de E contenant p éléments.

Exemple :
On veut faire une équipe de volley (soit 6 joueurs) à partir des 28 élèves de la classe. Cela revient à choisir un sous ensemble de 6 élèves : c'est donc une combinaison à 6 éléments.

Remarque :
L'ordre n'intervient pas. Ainsi, pour $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$ et $\{3, 2, 1\}$ désignent la même combinaison de 3 éléments.
Une combinaison est, en quelque sorte, une p liste où l'ordre n'a plus d'importance (ce qui regroupe donc plusieurs p listes...)

c) Nombre de combinaisons

Théorème 2

Soit E un ensemble fini à n éléments. Le nombre de combinaisons de p éléments de E est :

(i) *0 si $p > n$ ou si $p < 0$*

(ii) *si $0 \leq p \leq n$:*

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}^{p \text{ termes}}}{p!} = \frac{\text{"nombre de } p \text{ listes sans répétition"}}{p!}$$

▷ *Preuve* : Le (i) traduit le fait qu'on ne peut pas faire un sous ensemble de p éléments si $p > \text{Card}\, E$

Pour le (ii), commençons par compter les $p-$listes sans répétitions : il y en a $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Or plusieurs $p-listes$ correspondent à une même combinaison à p éléments (puisque l'ordre n'a pas d'importance pour les ensembles) : en fait, toutes les permutations d'une liste traduisent le même ensemble.

Il y a $p!$ permutations possibles, donc on a $p!$ fois trop de représentants, d'où la division par $p!$ et la formule $\frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{k}$.

◁

Astuce... *"k parmi n"*

Quand on parle du coefficient binomial $\binom{n}{k}$, on lit "k parmi n" : cela correspond bien à la définition de partie à k éléments. On compte le nombre de façons de prendre k éléments dans un ensemble qui en contient n.

Exemple :

Pour notre équipe de volley, il y a donc $\binom{28}{6} = \frac{28 \times 27 \times \ldots \times 23}{6!} = 376740$ équipes possibles (oui : c'est énorme !)

4) Rappel des formules autour des coefficients binomiaux :

a) Propriétés immédiates :

Propriété 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq p \leq n$:

$$(i)\ \binom{n}{0} = 1 \qquad (ii)\ \binom{n}{n} = 1 \qquad (iii)\ \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \qquad (iv)\ \binom{n+1}{p+1} = \frac{n+1}{p+1}\binom{n}{p}$$

▷ *Preuve* : On peut le montrer avec la formule, ou de manière combinatoire :

(i) Il n'y a qu'un sous ensemble à 0 élément, c'est l'ensemble $\emptyset$. Donc $\binom{n}{0} = 1$

(ii) Il n'y a qu'un sous ensemble à n éléments : E.

(iii) Choisir p éléments parmi n élements revient à choisir les $n-p$ éléments qu'on veut exclure.

(iv) Avec la formule seulement.

◁

b) Formule du triangle de Pascal

Théorème 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Alors

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

▷ *Preuve :* Remettons au propre la preuve combinatoire déjà donnée :
Considérons un ensemble E à $(n+1)$ éléments et soit e_1 le premier élément de E. Soit P l'ensemble des sous ensembles à $k+1$ éléments de E. On a $\text{Card}(P) = \binom{n+1}{k+1}$.
Notons A l'ensemble des sous ensembles à $k+1$ éléments qui contiennent e_1 et notons B l'ensemble des sous ensembles à $k+1$ éléments qui ne contiennent pas e_1. On a $P = A \cup B$ avec $A \cap B = \emptyset$.
Dénombrons A : pour construire un ensemble de $k+1$ éléments qui contient e_1, on choisit e_1, puis k éléments pour compléter, pris parmi les n éléments restants, donc $\binom{n}{k}$ possibilités : $\text{Card}(A) = \binom{n}{k}$
D'autre part, pour construire un élément de B, il faut choisir $k+1$ éléments parmi les n restants, e_1 étant ignoré : $\text{Card}(B) = \binom{n}{k+1}$.
On a $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = P$, donc $\text{Card}(P) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$, c'est à dire

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

◁

? Le saviez-vous ? *Cantor VS Kronecker*

Le dénombrement tel que présenté en ECG est limité au cas du cardinal fini et des entiers. Mais la théorie des ensembles propose de parler de cardinal d'ensembles infinis.
En définissant le cardinal à travers des bijections, Cantor a montré, vers la moitié du XIXème siècle, qu'il y avait "autant" d'entiers naturels que d'entiers relatifs... ou que de nombres rationnels (les fractions). En revanche, $\mathbb{R}$ contient infiniment plus d'éléments : il y aurait donc plusieurs infinis (et même une infinité d'infinis....) !
Une véritable révolution à l'époque qui l'opposa à un grand professeur de mathématique reconnu, Leopold Kronecker, dont il était un des étudiants...



L'opposition entre les deux mathématiciens est sujette à beaucoup de légendes (comme celle attribuant au jeune Cantor un tag d'insultes contre Kronecker, gravé sur une table de l'université de Berlin) : Kronecker refusait totalement l'avancée notable de Cantor dans ce domaine. Professeur très influent à Berlin, il s'est ainsi opposé à ce que son ancien étudiant obtienne une chaire dans la prestigieuse université....
Tout ceci n'a pas empêché Cantor d'être reconnu comme un génie des mathématiques et un des fondateurs des mathématiques modernes.

II Espaces probabilisés finis

1) Expérience aléatoire

a) Définition

On appelle "expérience aléatoire" toute action dont le résultat ne peut être prévu avec certitude.

Exemples :

- lancer d'une pièce : à chaque lancer, même en jetant la pièce exactement de la même façon (a priori...) , le côté visible est différent.
- la plupart des expériences scientifiques sont en réalité aléatoires : aléas des appareils de mesure, des objets étudiés (par exemple dans les sondages....)

b) Univers :

On cherche à relier les expériences aléatoires, donc incertaines, aux mathématiques, a priori science "déterministe". Pour cela, on effectue ce que l'on appelle une modélisation.
Supposons que l'on connaît tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire, et que ceux-ci sont en nombre fini. On note alors Ω l'ensemble de ces résultats, que l'on appelle "univers". A priori, chaque expérience aléatoire a un univers différent.

Exemple :

- Pour "pile ou face", $\Omega = \{"pile", "face"\}$.
- Lancer d'un dé 6 faces : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Lancer de deux dés 6 faces : $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,5), (5,6)\} = [\![1,6]\!] \times [\![1,6]\!]$ soit 36 résultats possibles (car $\text{Card}(\Omega) = \text{Card}([\![1,6]\!]) \times \text{Card}([\![1,6]\!]) = 6 \times 6$)
  ou $\Omega = \{\{1,1\}, \{1,2\}, \ldots, \{6,6\}\}$ si l'ordre n'a pas d'importance. Quel est le cardinal d'Ω ?
  Posons Ω_1 l'ensemble des résultats où les deux dés sont distincts : il s'agit de l'ensemble des combinaisons de 2 éléments parmi 6, donc $\text{Card}(\Omega_1) = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$.
  Posons Ω_2 l'ensemble des doubles. $\text{Card}(\Omega_2) = 6$.
  On a $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \emptyset$, donc $\text{Card}(\Omega) = \text{Card}(\Omega_1) + \text{Card}(\Omega_2) = 15 + 6 = 21$.

Remarque
Le choix de l'univers pour modéliser notre expérience dépend de l'objectif qu'on se donne.

2) Evénement aléatoire

a) Définition

Définition 9

On appelle "événement aléatoire" tout sous ensemble de résultats.
Autrement dit, dire qu'un ensemble A modélise un événement signifie que A est une partie de l'univers Ω.
L'ensemble des événements peut donc être modélisé par $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemples :
Prenons le lancer d'un unique dé 6 faces. On choisit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- l'événement "le lancer a donné un nombre pair" est modélisé par l'ensemble $\{2, 4, 6\}$.
- $\{4, 5, 6\}$ modélise l'événement "le lancer a donné un nombre supérieur ou égal à 4".
- $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ modélise l'événement "le dé a été lancé".
- $\emptyset$ modélise l'événement "il n'y a pas eu de résultat (le dé s'est volatilisé ?)".

Remarques :

- Ω et $\emptyset$ sont des parties de Ω : ils modélisent donc bien des événements...
- Si $\text{Card}(\Omega) = n$, on a 2^n événements possibles.
- Soit $\omega \in \Omega$ un résultat. L'ensemble $\{\omega\}$ est une partie de Ω, donc un événement : on parle d'événement élémentaire. De manière un peu abusive, on dit parfois que Ω est l'ensemble des événements élémentaires.

b) Opération sur les ensembles et événements

Définition 10

Soit A et B deux événements.

1. $A \cup B = \{\omega \in \Omega / \omega \in A$ *ou* $\omega \in B\}$ *modélise l'événement "A s'est produit ou B s'est produit (ou les deux)"*
2. $A \cap B = \{\omega \in \Omega / \omega \in A$ *et* $\omega \in B\}$ *modélise l'événement A et B ont eu lieu (simultanément).*
3. $A \setminus B = \{\omega \in \Omega / \omega \in A$ *et* $\omega \notin B\}$ *modélise l'événement A a eu lieu mais pas B.*
4. $\bar{A} = \{\omega \in \Omega / \omega \notin A\}$ *modélise l'événement "A n'a pas eu lieu"*

Exemple :
"Le lancer de dé est pair et supérieur ou égal à 4" se modélise par $\{2,4,6\} \cap \{4,5,6\} = \{4,6\}$

Remarque :
- Si A et B sont tels que $A \cap B = \emptyset$, on dit qu'ils sont incompatibles. Par exemple "obtenir un lancer pair" et "obtenir un lancer impair" sont incompatibles.
- Il est souvent très intéressant pour le calcul de décomposer un événement en union ou intersection d'événements... Cela sera un outil de justification essentiel.

c) Système complet d'événements :

Définition 11

On appelle système complet d'événements toute famille d'événements A_1, A_2,...,A_n deux à deux incompatibles et tels que la réunion de tous donne l'univers.
Autrement dit :

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
2. *si* $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Exemples :
1. Pour le lancer de dé, "obtenir un résultat pair" et "obtenir un résultat impair" forment un système complet d'événements.
2. Pour le lancer de deux dés, "obtenir deux dés différents" (ce qu'on avait noté Ω_1) et "obtenir un doublon" (ce qu'on a noté Ω_2) forment un système complet d'événements.

Remarque :
Si aucun des A_i est vide, on parle de "partition de Ω". En général, ce n'est pas un problème d'avoir des événements vides, donc on ne cherchera pas forcément à avoir une partition.

3) Probabilité

a) Définition

Exemple introductif
Prenons le lancer d'une pièce bien équilibrée. On lance la pièce un grand nombre de fois afin de déterminer le "pourcentage de chance" que pile tombe.
Si tout va bien, pour pile, on trouve 50%, et pour face 50%.
Ainsi, à l'événement "pile" est associé le réel 0.5, à "face", le réel 0.5 : on a créé une application de l'ensemble des événements possibles dans $[0,1]$

Définition 12

Soit Ω un ensemble fini. On appelle probabilité sur Ω toute application P définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ à valeur réelle et vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $P(A) \in [0,1]$
2. $P(\Omega) = 1$
3. *si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$*

Remarques :

1. Par une récurrence immédiate, on peut montrer à partir de la propriété 3 que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont n événements deux à deux incompatibles, alors
$$P(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$
2. En général, on n'a pas besoin de définir P pour tous les événements : il suffit de le faire pour tous les événements élémentaires car tout événement est une réunion d'événements élémentaires incompatibles.
Exemple : pour pile ou face, on défini P par
$P(\text{"}pile\text{"}) = 0.5$ et $P(\text{"}face\text{"}) = 0.5$. On a alors $P(\Omega) = P(\text{"}pile\text{"} \cup \text{"}face\text{"}) = 0.5+0.5 = 1$
3. Le couple ($\underbrace{\Omega}_{\text{"}l'univers\text{"}}$, $\underbrace{P}_{\text{"}la\ proba\text{"}}$) est appelé "espace probabilisé".
Modéliser une expérience aléatoire, c'est donc donner un espace probabilisé qui rend compte de cette expérience aléatoire.

b) Propriétés

Propriété 2

Soient A et B deux événements,

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. *Si $A \subset B$, $P(A) \leq P(B)$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.*

▷ *Preuve :*

◁

Méthode : *Comment modéliser une expérience aléatoire ?*

Etape 1 :
On réfléchit précisément à ce qu'est un résultat de notre expérience, afin que celui-ci rende bien compte de TOUTE l'expérience. Cela nous donne l'univers Ω.

Etape 2 :
On construit la probabilité P en donnant pour chaque événement élémentaire sa probabilité.

Etape 3 :
On vérifie la cohérence de notre modélisation : a-t-on bien $P(\Omega) = 1$?

Exemple :

1. Pile ou face.
   On lance une pièce : 2 résultats possibles : $\Omega = \{P, F\}$.
   Quelle probabilité donner aux événements élémentaires ?
   Si on veut modéliser une pièce équilibrée, on définira la probabilité P en posant $P(P) = P(F) = 0.5$.
   On a bien $P(\Omega) = P(P) + P(F) = 0.5 + 0.5 = 1$
   Si on veut modéliser une pièce truquée, on choisi un $p \in [0, 1]$ et on définira P en posant $P(P) = p$ et $P(F) = 1 - p$.
   (remarque : un tel modèle est appelé "modèle de Bernoulli de paramètre p")
2. Répétition : on lance deux fois de suite une pièce bien équilibrée et on veut la probabilité d'avoir au mons un pile.
   Un résultat de l'expérience est le résultat des DEUX pièces. Il faut donc que l'univers Ω rende compte des deux lancers.
   Ainsi, $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\} = \{P, F\}^2$
   A priori, chaque couple de résultats à la même probabilité de réalisation, et donc on aura $P(\{(P, P)\}) = P(\{P, F\}) = ... = \dfrac{1}{4}$
   L'événement recherché est "avoir au moins un pile", c'est donc $P((P, P), (P, F), (F, P)) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

4) Un cas particulier de probabilité : la probabilité uniforme

a) Construction :

Définition 13

Soit Ω un ensemble fini non vide. On appelle probabilité uniforme sur Ω l'application P définie par :

$$P : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \to \mathbb{R} \\ A & \mapsto \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \end{cases}$$

Proposition 6

La probabilité uniforme est une probabilité.

▷ *Preuve* : Soit P définie pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ par $P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$ On a trois points à vérifier :

(i) P est à valeur dans $[0, 1]$: en effet, pour tout $A \subset \Omega$, on a $\text{Card}(A) \geq 0$ et $\text{Card}(A) \leq \text{Card}(\Omega)$ donc $\dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \geq 0$ et $\dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \leq 1$, donc $P(A) \in [0, 1]$

(ii) $P(\Omega) = \dfrac{\text{Card}(\Omega)}{\text{Card}(\Omega)} = 1$.

(iii) Soient A et B deux évenements disjoints, alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$, d'où $P(A \cup B) = \dfrac{\text{Card}(A) + \text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = P(A) + P(B)$.

◁

b) Utilisation typique

On emploie la probabilité uniforme pour modéliser des expériences dont aucun résultat n'est privilégié. Dans le langage courant, c'est l'idée lorsqu'on utilise le terme "au hasard".
Exemple : un dé non pipé, une pièce non truquée, le tirage d'une carte dans un jeu de tarot sont autant d'expériences qui se modélisent bien par une probabilité uniforme.
Dans l'exemple des deux lancers de pile ou face, on a utilisé la probabilité uniforme sur $\{P, F\}^2$.

Remarque :
On peut retenir la proba uniforme sous la forme suivante :

$$P(A) = \frac{\text{"nbre de cas favorables"}}{\text{"nbre de cas possibles"}}$$

Le terme "au hasard" ne veut pas toujours dire que la proba est uniforme. Prenons l'exemple du lancer de deux dés 6 faces non pipés.
Premier modèle : $\Omega = [\![1,6]\!]^2 = \{(i,j), i \in [\![1,6]\!], j \in [\![1,6]\!]\}$
Tous les éléments ont même probabilité de se produire : on utilise la probabilité uniforme.
Ainsi, pour tout $(i,j) \in \Omega$, $P(\omega) = \dfrac{1}{36}$
Deuxième modèle : on ne distingue plus les dés. On a alors Ω de cardinal 21 ($\binom{6}{2}$ pour les combinaisons et 6 doublons).
Cette fois, ce n'est plus uniforme : la combinaison $\{1,2\}$ par exemple peut être obtenue en faisant $(1,2)$ ou $(2,1)$, alors que $\{1,1\}$ n'est obtenu que avec $(1,1)$.
Ainsi, on a deux fois moins de chance d'avoir un double que d'avoir deux dés différents. En revanche, tous les doubles ont même proba d'arriver, et toutes les combinaison également.
Notons p_1 la proba d'un double et p_2 celle de deux différents.
On a $p_2 = 2p_1$, et comme on veut $P(\Omega) = 1$ avec $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ on obtient :

$$15p_2 + 6p_1 = 1$$

d'où

$$30p_1 + 6p_1 = 1$$

et enfin $p_1 = \dfrac{1}{36}$ et $p_2 = \dfrac{1}{18}$.
Au final, on a $P(\{i,j\}) = \dfrac{1}{18}$ si $i \neq j$, et $P(\{i,j\}) = \dfrac{1}{36}$ si $i = j$: la probabilité n'est plus uniforme bien que les lancers de dés soit bien au hasard et les dés sont équilibrés.

III Probabilités conditionnelles

1) Probabilité conditionnée par un événement

a) Introduction

On lance un dé 6 faces mais on cache le résultat avant qu'on ait eu le temps de le voir. Le maître du jeu regarde le nombre obtenu et annonce que le résultat est pair. Quelle est la probabilité d'avoir un 6 ?
Sans l'information du maître du jeu, on modélise l'expérience en posant $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ muni de la probabilité uniforme. En notant A l'événement "avoir un 6", on a $A = \{6\}$ et donc $P(A) = \frac{1}{6}$.
Or, on sait que le résultat est pair. Notons B cet événement. On a $B = \{2,4,6\}$, et on peut alors changer notre Ω, puisque les résultats $1, 3$ et 5 n'arrivent jamais. On poserait ainsi $\tilde{\Omega} = \{2,4,6\}$, munit également de la probabilité uniforme. On a alors $P(A) = \frac{1}{3}$.
Le problème de ce raisonnement (tout à fait juste mathématiquement parlant), c'est que l'on modélise à nouveau l'expérience, nous obligeant à changer d'espace probabilisé en remplaçant Ω par l'événement B.
Sans changer d'espace probabilisé, on cherche à introduire une autre probabilité sur Ω qui ignore tout ce qui se passe hors de B.

b) Définition

Définition 14

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$.
On définit l'application P_B (lire "P sachant B")

$$P_B : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \to \mathbb{R} \\ A & \mapsto \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \end{cases}$$

P_B est une probabilité et est appelée "probabilité conditionnelle de P par l'événement B".

▷ *Preuve* : Montrons que P_B est bien une probabilité :

1. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $A \cap B \subset B$, donc $P(A \cap B) \leq P(B)$. De plus $P(B)$ et $P(A \cap B)$ sont positifs et donc $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq 1$ et $P_B(A) \geq 0$: on a bien $P_B(A) \in [0,1]$
2. Calculons $P_B(\Omega)$. On a $P_B(\Omega) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)}$, or $\Omega \cap B = B$ car $B \subset \Omega$, donc $P_B(\Omega) = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$.
3. Enfin, soit A_1 et A_2 deux événements incompatibles, alors $P_B(A_1 \cup A_2) = \dfrac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)}$.
   Or, $(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ et on a $(A_1 \cap B)$ et $(A_2 \cap B)$ incompatibles (car $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \underbrace{A_1 \cap A_2}_{=\emptyset} \cap B = \emptyset$.
   Ainsi, $P((A_1 \cup A_2) \cap B) = P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$ car P est une probabilité.
   Enfin, $P_B(A_1 \cup A_2) = \dfrac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \dfrac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P_B(A_1) + P_B(A_2)$.

Conclusion : P_B est bien une probabilité sur Ω. ◁

Exemple :
Dans l'introduction, on cherche en fait $P_B(A)$ avec comme espace probabilisé $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ muni de la probabilité uniforme.
On a $P(B) = P(\{2,4,6\}) = 3/6 = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = P(\{6\}) = 1/6$, d'où $P_B(A) = \dfrac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$.

c) Commentaires et interprétations

1. L'espace probabilisé (Ω, P_B) revient à identifier B et Ω :
   en effet, $P_B(B) = \dfrac{P(B \cap B)}{P(B)} = 1$. B joue ainsi le même rôle que Ω.
   On a ainsi restreint Ω à B : savoir que B a eu lieu nous permet "d'éliminer" des résultats.
2. On trouve parfois la notation $P(A|B)$ pour "probabilité de A sachant B". Cette notation date d'avant la formalisation rigoureuse des probabilités et doit être évitée. En effet, $P(A|B)$ signifierait que $(A|B)$ est un événement, ce qui n'est pas le cas.

Danger ! *Confusion entre proba conditionnelle et intersection*

Attention à ne pas confondre $P_B(A)$ et $P(A \cap B)$! Si on réfléchit trop vite, on peut prendre l'un pour l'autre....

▶ Lorsque l'on fait "$P(A \cap B)$", on veut dire que les deux événements A et B sont aléatoires. On ne sait pas si A ou B a eu lieu, et on cherche les "chances" que les deux aient lieu simultanément.

▶ En revanche, quand on calcule $P_B(A)$, on suppose que B a eu lieu : B n'est plus aléatoire, c'est un événement certain (d'ailleurs $P_B(B) = 1$)....

Il s'agira donc de bien réfléchir sur le contexte pour ne pas se tromper de calcul : supposez vous qu'un événement a eu lieu ou pas ?

2) Formule des probas composées : justification des arbres...

a) Formule des probas composées

Proposition 7

(i) Formule des probabilités composées :
Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$. Alors

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

(ii) Formule des probabilités composées "en cascade" :
Soit $n \geq 2$ et soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements tels que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$$

Alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

▷ *Preuve :*

(i) Comme $P(A) \neq 0$ on peut définir $P_A(B)$ et on a $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ et en multipliant par A on obtient $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.

(ii) Par récurrence. Pour $n = 2$, c'est la formule montrée en (i).
Supposons la formule vraie pour un certain $n \geq 2$ et soit $n+1$ événements $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ n événements tels que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$$

Comme $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \subset A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}$ on a $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \geq P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) > 0$ donc on peut appliquer la formule pour n :
$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \ldots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$
De plus $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}) = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n}(A_{n+1})$ car la formule est vraie pour 2 événements.
En recollant les morceaux on obtient la formule voulue.

◁

b) Exemple typique d'utilisation :

Un chapeau magique contient 3 lapins jaunes et 4 lapins bleus. On tire au hasard, successivement et sans remise 4 lapins de ce chapeau.
On s'intéresse à la probabilité de l'événement A="obtenir alternativement un lapin bleu et un lapin jaune en commençant par un jaune".
L'intérêt de la formule des probabilités composées, c'est qu'on va pouvoir se passer de la modélisation complète et raisonner étape par étape, sans effectuer de dénombrement compliqué.

Première étape :
On suppose qu'on a un espace probabilisé (Ω, P) qui modélise notre expérience, mais on ne le précise pas.
On introduit ensuite les événements dont on va avoir besoin.
Pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, on introduit l'événement J_i : "le i ème lapin extrait est jaune."
On introduit de même B_i : "le i ème lapin est bleu". (en fait $B_i = \bar{J_i}$).
Clairement, on connait $P(J_1)$ et $P(B_1)$: $P(J_1) = 3/7$ et $P(B_1) = 4/7$.
En revanche, on ne connait pas $P(J_2)$, $P(J_3)$ ni $P(J_4)$....

Deuxième étape :
On traduit la question : on cherche à calculer $A = J_1 \cap B_2 \cap J_3 \cap B_4$.
D'après la formules des probabilités composées, on a :

$$P(A) = P(J_1 \cap B_2 \cap J_3 \cap B_4) = P(J_1)P_{J_1}P(B_2)P_{J_1\cap B_2}(J_3)P_{J_1\cap B_2\cap J_3}(B_4)$$

On a $P(J_1) = 3/7$.
Pour $P_{J_1}(B_2)$ cela revient à prendre un univers $\tilde{\Omega}$ où on a plus que 2 lapins jaunes et 4 bleus, le tout muni de la loi uniforme.
On obtient donc $P_{J_1}(B_2) = \dfrac{4}{6}$.
De même, $P_{J_1\cap B_2}(J_3) = \dfrac{2}{5}$.
Enfin $P_{J_1\cap B_2\cap J_3}(B_4) = \dfrac{3}{4}$
D'où $P(A) = \dfrac{3}{7}\dfrac{4}{6}\dfrac{2}{5}\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{75}$.



Méthode : *Traiter un problème avec succession d'événements*
Quand un problème traite de la répétition d'une action, il est essentiel pour la clarté du raisonnement de numéroter les événements.
Dans cet exemple, les événements sont nommés J_1, J_2, etc... et pas seulement J, qui serait imprécis sur le numero de tirage.

c) Représentation par un arbre

Une façon de traduire les probabilités composées est la représentation par arbre pondéré. Chaque branche est pondérée de la probabilité conditionnelle d'être obtenue sachant les noeuds précédents :

On fait alors le produit des probas sur les branches pour avoir l'événement qui nous intéresse. L'inconvénient MAJEUR est que pour beaucoup d'événements, cela devient imbuvable. Il faut donc utiliser ceci avec parcimonie, et, dans l'idéal, toujours citer la formule des probas composées et la donner avec les événements pour avoir une vraie justification du calcul effectué.

3) Utilisation des systèmes complets d'événements

a) Principe :

On a vu que décomposer en système complet d'événement peut faciliter certains calculs, en particulier lorsque l'on fait du dénombrement pour déterminer Ω.
L'autre avantage est que si on a un système complet d'événements, on peut facilement calculer des probabilités.
En effet, si $\{A_1, \dots, A_n\}$ est un système complet d'événements, et si B est un événement quelconque, on a

$$B = \Omega \cap B = (A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \dots \cup (A_n \cap B)$$

Comme les A_i sont deux à deux disjoints, les $(A_i \cap B)$ sont deux à deux disjoints aussi, et on peut écrire :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

b) Première utilisation : formule des probabilités totales

Exemple :
On dispose de deux chapeaux : un haut-de-forme et un chapeau melon. Le premier chapeau contient 3 lapins jaunes et 2 bleus, tandis que le second contient 1 seul jaune pour 3 bleus.
On lance une pièce équilibrée. Si pile tombe, on extrait un lapin du chapeau haut de forme. Sinon, on prend dans le chapeau melon.
Quelle est la probabilité d'avoir un lapin jaune ?
A nouveau, on suppose qu'on a (Ω, P) qui modélise cette expérience, mais on ne le précise pas.
On introduit les événements suivants :

- P : la pièce donne pile
- F : la pièce donne face
- J : le lapin extrait est jaune
- B : le lapin est bleu.

On cherche $P(J)$. Comme $\{P, F\}$ est un système complet d'événements, on a

$$J = \Omega \cap J = (P \cup F) \cap J = P \cap J \cup F \cap J.$$

On a donc $P(J) = P(P \cap J) + P(F \cap J)$. On applique maintenant les probabilités composées :

$$P(P \cap J) = P(P)P_P(J) \text{ et } P(F \cap J) = P(F)P_F(J).$$

D'après l'énoncé, on a $P(P) = \dfrac{1}{2} = P(F)$, $P_P(J) = \dfrac{3}{5}$ et $P_F(J) = \dfrac{1}{4}$.
On peut donc calculer

$$P(J) = \frac{1}{2}.\frac{3}{5} + \frac{1}{2}.\frac{1}{4} = \frac{3}{10} + \frac{1}{8} = \frac{17}{40}.$$

Au lieu de détailler comme fait précédemment, on peut directement utiliser la formule dite des "probabilités totales" :

Proposition 8 (*Formule des probabilités totales*)

Soit $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un système complet d'événements. Soit B un événement, on a :

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P_{A_k}(B)$$

▷ *Preuve :*

◁

c) Deuxième utilisation : formule de Bayes

Exemple :
On reprend l'exemple précédent. L'expérience a eu lieu, et on a obtenu un lapin jaune. Quelle est la probabilité de l'avoir extrait du chapeau melon ?
Il s'agit de calculer la probabilité de F sachant J.
On a $P_J(F) = \dfrac{P(F \cap J)}{P(J)}$. Par la formule des probabilités totale, on a $P(J) = P(P)P_P(J) + P(F)P_F(J)$ et par les probabilités composées, il vient $P(F \cap J) = P(F)P_F(J)$. On obtient la formule :

$$P_J(F) = \frac{P(F)P_F(J)}{P(P)P_P(J) + P(F)P_F(J)}$$

D'où $P_J(F) = \dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{17}{40}} = \dfrac{5}{17}$

Proposition 9 (*formule de Bayes*)

1. ***Version simple :*** *Soient A et B deux événements de probabilité non nulle, alors*

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$$

2. ***Version avec système complet d'événements :***
Soit $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ un système complet d'événements, tous de probabilité non nulle. Soit B un événement tel que $P(B) \neq 0$. Alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)}$$

▷ *Preuve :* On écrit la définition $P_B(A_i) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$, puis on applique les probas composées au numérateur, les probabilités totales au dénominateur. ◁

Remarque :
Il n'est pas vraiment utile de retenir la formule par coeur : c'est la preuve qu'il faut connaître !

Le saviez-vous ? *Qui est Bayes ?*

Pasteur anglais du XVIII^{e} et mathématicien à ses heures perdues, Thomas Bayes est considéré comme le précurseur des probabilités conditionnelles. Il cherche à trouver les causes les plus probables à des phénomènes aléatoires observés.
La "formule de Bayes" est son résultat le plus célèbre. Il lui a été attribué à titre posthume par un de ses amis à qui il avait envoyé le manuscrit avant de mourir.



"maths Pantheon" par Paul Epps

Le résultat sera ensuite généralisé par Pierre Simon de Laplace. La formule de Bayes est fréquemment utilisée dans divers domaines, allant de la reconstitution de signal détérioré par des interférences jusqu'à l'intelligence artificielle et les réseaux neuronaux.

IV Indépendance

1) Evénements indépendants

a) Exemple introductif :

On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. Quel est la probabilité d'obtenir Pile la deuxième fois ? Quelle est la probabilité d'avoir Pile deux fois de suite ? Si on a déjà obtenu Pile la première fois, a-t-on moins de chance d'avoir pile la seconde fois ?
Modélisons entièrement l'expérience : on a deux lancers dont l'ordre est important, donc l'univers (l'ensemble des résultats) est

$$\Omega = \{(P,F),(P,P),(F,P),(F,F)\}$$

La pièce étant équilibrée, tous les événements élémentaires sont équiprobables, donc on choisi la probabilité uniforme.
Soit A l'événement "obtenir pile la première fois" et B l'événement "obtenir pile la deuxième fois".
On a $A = \{(P,F),(P,P)\}$ donc $P(A) = \text{Card}(A)/\text{Card}(\Omega) = \dfrac{1}{2}$.
De même $B = \{(F,P),(P,P)\}$ et $P(B) = \dfrac{1}{2}$.
Avoir deux fois pile se traduit par $A \cap B$ et $P(A \cap B) = P(\{(P,P)\}) = \dfrac{1}{4}$.
Sachant qu'on a déjà obtenu pile la première fois, on a

$$P_A(B) = P(A \cap B)/P(B) = P(\{P,P\})/P(B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $P_A(B) = P(B)$: le fait d'avoir A ne change pas la probabilité d'avoir B. C'est l'idée intuitive d'indépendance.

b) Définition :

Définition 15

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soit A et B deux événements.
On dit que A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Remarques :
Si A est de probabilité non nulle, A et B indépendants équivaut à $P_A(B) = P(B)$.

c) Exemple :

On lance un dé 6 faces non pipé, et on s'intéresse aux événements suivants :
- A : le résultat est pair
- B : le résultat est $\geq$ à 3
- C : le résultat est $\leq$ à 3

Étudiez l'indépendance de A et B et de B et C.

2) Propriétés diverses...

a) Propriétés :

Propriété 3

(i) Pour tout événement A, A et $\emptyset$ sont indépendants, A et Ω sont indépendants.
(ii) Si A et B sont deux événements indépendants, A et $\bar{B}$ sont indépendants, $\bar{A}$ et B sont indépendants et $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

▷ *Preuve :*
(i) $P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = P(A)P(\emptyset)$ donc A et $\emptyset$ sont indépendants. De même $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \times 1 = P(A)P(\Omega)$ donc A et Ω sont indépendants.
(ii) Remarquons que $A \cup \bar{A} = \Omega$ avec $A \cap \bar{A} = \emptyset$.
On a donc $B = (A \cup \bar{A}) \cap B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$, la réunion étant disjointe.
On a donc $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$. Comme A et B sont indépendants, on a $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ et donc
$P(B) - P(A)P(B) = P(\bar{A} \cap B)$, d'où $(1 - P(A))P(B)) = P(\bar{A} \cap B)$. Enfin, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, et donc

$$P(\bar{A})P(B) = P(\bar{A} \cap B)$$

donc A et $\bar{B}$ sont indépendants.
A et B jouant des rôles symétriques, on montre de même que si A et B sont indépendants, alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.
Enfin, en remplaçant A par $\bar{A}$ dans la première démonstration, on obtient $\bar{A}$ et $\bar{B}$ indépendants.

◁

b) Généralisation :

Définition 16

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et soient n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
On dit que ces événements sont mutuellement indépendants (ou indépendants) si et seulement si

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \forall i_1, \ldots, i_k \in [\![1, n]\!], P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$$

Autrement dit : n événements sont indépendants, si et seulement si la relation d'indépendance est vérifiée pour toutes les intersections possibles.
Par exemple, A_1, A_2 et A_3 indépendants signifie :

Remarque :
En général, l'indépendance mutuelle est une hypothèse de l'énoncé. Il est rarissime qu'on demande à la démontrer.